Électromagnétisme – Chapitre 4

Équations de Maxwell et énergie électromagnétique – TD

Exercice 1 : Questions de cours

On considère un matériau conducteur présentant une densité volumique de charges $\rho(x,t)$ et un vecteur densité volumique de courants $\vec{j}(x,t)$, dont on suppose qu'ils ne dépendent que de la coordonnée x et du temps t.

1. Établir l'équation locale de conservation de la charge dans ce cas unidimensionnel à l'aide d'un bilan de charges.

On s'intéresse maintenant aux équations de Maxwell sous forme locale et intégrale.

2. Rappeler l'équation de Maxwell-Gauss sous forme locale, puis établir une forme intégrale de cette équation.

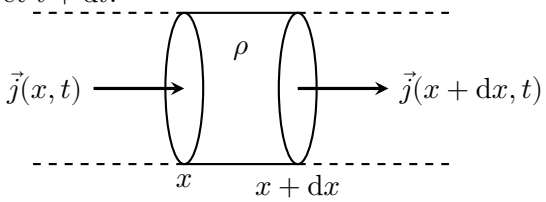
3. Rappeler l'équation de Maxwell-Faraday sous forme locale, puis établir une forme intégrale de cette équation.

4. Rappeler l'équation de Maxwell-Thomson sous forme locale, puis établir une forme intégrale de cette équation.

5. Rappeler l'équation de Maxwell-Ampère sous forme locale, puis établir une forme intégrale de cette équation.

Correction :

1. On réalise un bilan de charges à une tranche de ce matériau comprise entre les abscisses x et $x+\mathrm{d}x$ de surface S entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$.



En exprimant le vecteur densité volumique de courants de la forme $\vec{j}(x,t) = j(x,t)\,\vec{e}_x$, on peut exprimer pour cette tranche :

- la charge entrante en x entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$: $\delta Q_{\text{entrante}} = I(x,t)\,\mathrm{d}t = \iint_{\text{S}} [j(x,t)\,\vec{e}_x] \cdot (\mathrm{d}S\,\vec{e}_x)\,\mathrm{d}t = j(x,t)\,S\,\mathrm{d}t$;
- la charge sortante en $x+\mathrm{d}x$ entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$: $\delta Q_{\text{sortante}} = I(x+\mathrm{d}x,t)\,\mathrm{d}t = \iint_{\text{S}} [j(x+\mathrm{d}x,t)\,\vec{e}_x]\cdot(\mathrm{d}S\,\vec{e}_x)\,\mathrm{d}t = j(x+\mathrm{d}x,t)\,S\,\mathrm{d}t \approx \left[j(x,t) + \dfrac{\partial j}{\partial x}\,\mathrm{d}x\right] S\,\mathrm{d}t$;

d'où on en déduit la variation de la charge de cette tranche : $\mathrm{d}Q = \delta Q_{\text{entrante}} - \delta Q_{\text{sortante}} = j(x,t)\,S\,\mathrm{d}t - \left[j(x,t) + \dfrac{\partial j}{\partial x}\,\mathrm{d}x\right] S\,\mathrm{d}t = -\dfrac{\partial j}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,S\,\mathrm{d}t$.

On peut également exprimer la variation de la charge de cette tranche entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$ telle que : $\mathrm{d}Q = Q(t+\mathrm{d}t) - Q(t) = \rho(x,t+\mathrm{d}t)\,S\,\mathrm{d}x - \rho(x,t)\,S\,\mathrm{d}x \approx \left[\rho(x,t) + \dfrac{\partial \rho}{\partial t}\,\mathrm{d}t\right] S\,\mathrm{d}x - \rho(x,t)\,S\,\mathrm{d}x = \dfrac{\partial \rho}{\partial t}\,\mathrm{d}t\,S\,\mathrm{d}x$,

soit en égalisant les deux expressions : $-\dfrac{\partial j}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,S\,\mathrm{d}t = \dfrac{\partial \rho}{\partial t}\,\mathrm{d}t\,S\,\mathrm{d}x$, d'où en simplifiant : $-\dfrac{\partial j}{\partial x} = \dfrac{\partial \rho}{\partial t}$, et on aboutit finalement à l'équation locale de conservation de la charge dans le cas unidimensionnel : $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial j}{\partial x} = 0$.

2. L'équation de Maxwell-Gauss s'écrit : $\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$.

Pour obtenir une forme intégrale de cette équation de Maxwell, on l'intègre sur un volume V : $\iiint_V \operatorname{div}\vec{E}\,\mathrm{d}V = \iiint_V \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\,\mathrm{d}V$, puis on exprime d'une part à l'aide du théorème d'Ostrograd-

ski : $\iiint_V \operatorname{div}\overrightarrow{E}\,\mathrm{d}V = \oiint_S \overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S}$, avec S la surface délimitant ce volume, et d'autre part : $\iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho\,\mathrm{d}V = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$ avec Q_{int} la charge électrique contenue à l'intérieur de ce volume, on retrouve alors le théorème de Gauss : $\oiint_S \overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$.

3. L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit : $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}$.
Pour obtenir une forme intégrale de cette équation de Maxwell, on l'intègre sur une surface S : $\iint_S \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \iint_S -\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S}$, puis on exprime d'une part à l'aide du théorème de Stokes : $\iint_S \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \oint_C \overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}$, avec C le contour sur lequel s'appuie cette surface, et on rappelle que la circulation du champ $\overrightarrow{E}$ correspond à une différence de potentiel, c'est-à-dire à une force électromotrice e, soit : $\oint_C \overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = e$, et d'autre part : $\iint_S -\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \overrightarrow{B}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}$, avec Φ le flux du champ magnétique à travers cette surface, on retrouve alors la loi de Faraday : $e = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}$.

4. L'équation de Maxwell-Thomson s'écrit : $\operatorname{div}\overrightarrow{B} = 0$.
Pour obtenir une forme intégrale de cette équation de Maxwell, on l'intègre sur un volume V : $\iiint_V \operatorname{div}\overrightarrow{B}\,\mathrm{d}V = 0$, puis on exprime à l'aide du théorème d'Ostrogradski : $\iiint_V \operatorname{div}\overrightarrow{B}\,\mathrm{d}V = \oiint_S \overrightarrow{B}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S}$, avec S la surface délimitant ce volume, on retrouve alors que le flux du champ magnétique est conservatif : $\oiint_S \overrightarrow{B}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = 0$.

5. L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit : $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{B} = \mu_0\,\vec{j} + \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$.
Pour obtenir une forme intégrale de cette équation de Maxwell, on l'intègre sur une surface S : $\iint_S \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{B}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \iint_S \mu_0\,\vec{j}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} + \iint_S \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S}$, puis on exprime d'une part à l'aide du théorème de Stokes : $\iint_S \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{B}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \oint_C \overrightarrow{B}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}$, avec C le contour sur lequel s'appuie cette surface, et d'autre part : $\iint_S \mu_0\,\vec{j}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} + \iint_S \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \mu_0\iint_S \vec{j}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} + \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \mu_0\,I_{\text{enl}} + \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S}$, avec I_{enl} l'intensité qui traverse cette surface, on obtient alors le théorème d'Ampère généralisé : $\oint_C \overrightarrow{B}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0\,I_{\text{enl}} + \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S}$.

Exercice 2 : Champ électromagnétique dans un espace

On considère un espace vide de charge et de courant, dans lequel règne un champ électromagnétique qui s'exprime :

$$\begin{cases} \overrightarrow{E} = f(z)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\vec{e}_x \\ \overrightarrow{B} = g(z)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\vec{e}_y \end{cases}$$

avec $f(z)$ et $g(z)$ des fonctions que l'on souhaite déterminer, et τ une constante positive.

1. Montrer que les équations de Maxwell imposent deux relations entre les fonctions $f(z)$ et $g(z)$.

2. En déduire une équation différentielle vérifiée par $f(z)$.

On suppose que $\overrightarrow{E}(z=0,t=0) = E_0\,\vec{e}_x$, avec E_0 une constante, et que le champ électrique s'annule lorsque $z \to +\infty$.

3. Déterminer l'expression du champ électrique en tout point de l'espace.

4. En déduire l'expression du champ magnétique en tout point de l'espace.

Correction :

1. L'équation de Maxwell-Faraday donne : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, avec $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \dfrac{\mathrm{d}E_x}{\mathrm{d}z}\,\vec{e}_y = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\vec{e}_y$ et $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\dfrac{1}{\tau}\,g(z)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\vec{e}_y$, d'où on en déduit : $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \dfrac{1}{\tau}\,g(z)$.

L'équation de Maxwell-Ampère donne dans le vide : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \varepsilon_0\,\mu_0\,\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, avec $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = -\dfrac{\mathrm{d}B_y}{\mathrm{d}z}\,\vec{e}_x = -\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\vec{e}_x$ et $\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\dfrac{1}{\tau}\,f(z)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\vec{e}_x$, d'où on en déduit : $\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}z} = \dfrac{\varepsilon_0\,\mu_0}{\tau}\,f(z)$.

2. En dérivant la première relation, on obtient : $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2} = \dfrac{1}{\tau}\,\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}z} = \dfrac{1}{\tau}\,\dfrac{\varepsilon_0\,\mu_0}{\tau}\,f(z)$, d'où : $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}^2 z} - \dfrac{\varepsilon_0\,\mu_0}{\tau^2}\,f(z) = 0$.

3. Comme $\dfrac{\varepsilon_0\,\mu_0}{\tau^2} > 0$, la solution est de la forme : $f(z) = A_1 \exp\left(-\dfrac{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}}{\tau}\,z\right) + A_2 \exp\left(\dfrac{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}}{\tau}\,z\right)$, avec A_1 et A_2 des constantes, d'où : $\vec{E} = \left[A_1 \exp\left(-\dfrac{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}}{\tau}\,z\right) + A_2 \exp\left(\dfrac{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}}{\tau}\,z\right)\right] \mathrm{e}^{-t/\tau}\,\vec{e}_x$.

Pour déterminer les constantes A_1 et A_2, on utilise les conditions aux limites :

- le champ électrique s'annule lorsque $z \to +\infty$, d'où : $A_2 = 0$;
- la condition $\vec{E}(z=0, t=0) = E_0\,\vec{e}_x$ impose : $f(0) = E_0 = A_1$.

On obtient finalement : $\vec{E} = E_0 \exp\left[-\dfrac{1}{\tau}\,(t + \sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}\,z)\right]\vec{e}_x$.

4. On en déduit : $g(z) = \tau\,\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = -E_0\,\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}\exp\left(-\dfrac{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}}{\tau}\,z\right)$, d'où : $\vec{B} = -E_0\,\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}\exp\left[-\dfrac{1}{\tau}\,(t + \sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}\,z)\right]\vec{e}_y$.

Exercice 3 : Énergie d'une distribution sphérique de charge

On considère une boule de rayon R centrée en O contenant une densité volumique de charge uniforme ρ.

1. Déterminer l'expression du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en tout point de l'espace à l'aide du théorème de Gauss.

2. En déduire l'expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique $u(M)$ en tout point de l'espace.

3. Déterminer l'expression de l'énergie totale U_{tot} associée à cette distribution de charges.

Correction :

1. On considère un point $M(r, \theta, \varphi)$ en coordonnées sphériques.

On étudie les symétries : les plans $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charges, et comme $\vec{E}(M)$ doit être contenu dans ces plans, on en déduit que : $\vec{E}(M) = E(r, \theta, \varphi)\,\vec{e}_r$.

On étudie les invariances : la distribution de charges est invariante par rotation selon θ et φ, d'où : $\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{e}_r$.

On définit pour surface de Gauss une sphère de rayon r centrée en O, d'où : $\displaystyle\oiint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \oiint_S E(r)\,\mathrm{d}S = E(r)\oiint_S \mathrm{d}S = E(r)\,4\,\pi\,r^2$.

Pour exprimer la charge contenue à l'intérieur de la surface de Gauss, il faut distinguer deux cas :

- si $r \geqslant R$, la surface de Gauss enveloppe toute la distribution, soit : $Q_{\text{int}} = \dfrac{4}{3}\,\pi\,R^3\,\rho$;
- si $r \leqslant R$, la surface de Gauss enveloppe seulement une partie de la distribution, soit : $Q_{\text{int}} = \dfrac{4}{3}\,\pi\,r^3\,\rho$.

L'application du théorème de Gauss donne : $\displaystyle\oiint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$, soit : $E(r)\,4\,\pi\,r^2 = \begin{cases} \dfrac{\frac{4}{3}\,\pi\,r^3\,\rho}{\varepsilon_0} & \text{pour } r \leqslant R \\ \dfrac{\frac{4}{3}\,\pi\,R^3\,\rho}{\varepsilon_0} & \text{pour } r \geqslant R \end{cases}$, d'où on en déduit le champ électrostatique :

$$\overrightarrow{E}(M) = \begin{cases} \dfrac{\rho\, r}{3\,\varepsilon_0}\,\vec{e}_r & \text{pour } r \leqslant R \\ \\ \dfrac{\rho\, R^3}{3\,\varepsilon_0\, r^2}\,\vec{e}_r & \text{pour } r \geqslant R \end{cases}.$$

2. La densité volumique d'énergie électromagnétique est : $u(M) = \dfrac{1}{2}\,\varepsilon_0\,\overrightarrow{E}^2 = \begin{cases} \dfrac{\rho^2\, r^2}{18\,\varepsilon_0} & \text{pour } r \leqslant R \\ \\ \dfrac{\rho^2\, R^6}{18\,\varepsilon_0\, r^4} & \text{pour } r \geqslant R \end{cases}.$

3. On obtient l'énergie totale en intégrant la densité volumique d'énergie électromagnétique sur tout l'espace : $U_{\text{tot}} = \iiint_{\text{espace}} u(M)\,\mathrm{d}V = \displaystyle\int_{r=0}^{+\infty}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\,\pi} u(M)\,\mathrm{d}r\,r\,\mathrm{d}\theta\,r\,\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi = 4\,\pi\displaystyle\int_{r=0}^{+\infty} u(M)\,r^2\,\mathrm{d}r$, soit :

$$U_{\text{tot}} = 4\,\pi\left(\int_{r=0}^{R}\frac{\rho^2\, r^2}{18\,\varepsilon_0}\,r^2\,\mathrm{d}r + \int_{r=R}^{+\infty}\frac{\rho^2\, R^6}{18\,\varepsilon_0\, r^4}\,r^2\,\mathrm{d}r\right) = 4\,\pi\left(\frac{\rho^2}{18\,\varepsilon_0}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R + \frac{\rho^2\, R^6}{18\,\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_R^{+\infty}\right) = \frac{4\,\pi\,\rho^2\, R^5}{15\,\varepsilon_0}.$$

Exercice 4 : Floculation d'une suspension colloïdale

Une suspension colloïdale est une solution aqueuse contenant des particules de petites tailles (de 10 nm à 1 µm) chargées négativement. La répulsion électrostatique entre ces particules engendre des vitesses de sédimentation très lentes. En ajoutant des sels ioniques à la suspension, on facilite l'agglomération des particules entre elles, ce qui permet d'accélérer la sédimentation, c'est le phénomène de floculation.

On considère une particule colloïdale sphérique, centrée en O, de rayon R et de charge $Q < 0$ dans une solution aqueuse. En ajoutant des sels ioniques dans la solution, on suppose que les densités volumiques en cations n_+ (de charge $+z\,e$) et en anions n_- (de charge $-z\,e$) sont données par la loi de Boltzmann en coordonnées sphériques :

$$n_+(r) = n_0\exp\left[-\frac{z\,e\,V(r)}{k_{\text{B}}\,T}\right] \qquad \text{et} \qquad n_-(r) = n_0\exp\left[+\frac{z\,e\,V(r)}{k_{\text{B}}\,T}\right]$$

avec $k_{\text{B}}\,T \gg |z\,e\,V(r)|$, où n_0 et z sont des constantes, e est la charge élémentaire, $V(r)$ est le potentiel électrostatique, et k_{B} est la constante de Boltzmann.

On rappelle que l'opérateur laplacien appliqué à une fonction $f(r)$ s'exprime en coordonnées sphériques :

$$\Delta f = \frac{1}{r}\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\,(r\,f)\,.$$

1. Exprimer la densité volumique de charge $\rho(r)$ autour de la particule colloïdale en développant au premier ordre en $\dfrac{z\,e\,V(r)}{k_{\text{B}}\,T}$.

2. À l'aide de l'équation de Maxwell-Gauss, montrer que le potentiel électrostatique vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{1}{r}\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\,[r\,V(r)] - \frac{2\,z^2\,e^2\,n_0\,V(r)}{\varepsilon_0\,k_{\text{B}}\,T} = 0.$$

Pour résoudre cette équation différentielle, on définit la fonction : $u(r) = r\,V(r)$.

3. Résoudre l'équation différentielle vérifiée par $u(r)$, puis en déduire que le potentiel peut s'exprimer sous la forme :

$$V(r) = \frac{A}{r}\,\mathrm{e}^{-r/\delta} + \frac{B}{r}\,\mathrm{e}^{r/\delta}$$

avec A et B des constantes, et δ une longueur que l'on exprimera.

On suppose que le champ électrostatique est continu à la surface de la particule (en $r = R$), et qu'il est nul à grande distance (lorsque $r \to \infty$).

4. En déduire l'expression du champ électrostatique $\overrightarrow{E}(r)$.

5. Décrire l'effet de l'ajout d'ions sur le champ électrostatique créé par une particule colloïdale, puis expliquer pourquoi il permet le phénomène de floculation.

Correction :

1. La densité volumique de charge est : $\rho(r) = z\,e\,n_+ + (-z\,e)\,n_- = z\,e\,n_0\left(\exp\left[-\dfrac{z\,e\,V(r)}{k_\mathrm{B}\,T}\right] - \exp\left[\dfrac{z\,e\,V(r)}{k_\mathrm{B}\,T}\right]\right)$.
Comme $k_\mathrm{B}\,T \gg |z\,e\,V(r)|$, on peut réaliser le développement au premier ordre : $\rho(r) \approx z\,e\,n_0\left(1 - \dfrac{z\,e\,V(r)}{k_\mathrm{B}\,T} - 1 - \dfrac{z\,e\,V(r)}{k_\mathrm{B}\,T}\right) = -\dfrac{2\,z^2\,e^2\,n_0\,V(r)}{k_\mathrm{B}\,T}$.

2. L'équation de Maxwell-Gauss donne : $\mathrm{div}\,\vec{E} = \dfrac{\rho(r)}{\varepsilon_0}$, avec $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V(r)$, soit : $\mathrm{div}\left[-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V(r)\right] = \dfrac{\rho(r)}{\varepsilon_0}$, d'où : $\Delta V(r) + \dfrac{\rho(r)}{\varepsilon_0} = 0$, et on obtient en coordonnées sphériques : $\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\left[r\,V(r)\right] - \dfrac{2\,z^2\,e^2\,n_0\,V(r)}{\varepsilon_0\,k_\mathrm{B}\,T} = 0$.

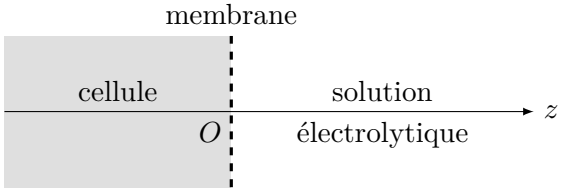
3. La fonction $u(r)$ vérifie l'équation différentielle : $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2} - \dfrac{2\,z^2\,e^2\,n_0}{\varepsilon_0\,k_\mathrm{B}\,T}\,u(r) = 0$, soit : $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2} - \dfrac{u(r)}{\delta^2} = 0$, en posant $\delta = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_0\,k_\mathrm{B}\,T}{2\,z^2\,e^2\,n_0}}$.
La solution est de la forme : $u(r) = A\,\mathrm{e}^{-r/\delta} + B\,\mathrm{e}^{r/\delta}$, avec A et B des constantes, d'où on en déduit que le potentiel peut s'exprimer sous la forme : $V(r) = \dfrac{u(r)}{r} = \dfrac{A}{r}\,\mathrm{e}^{-r/\delta} + \dfrac{B}{r}\,\mathrm{e}^{r/\delta}$.

4. Le champ électrostatique s'exprime : $\vec{E}(r) = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\,\vec{e}_r = \left[A\left(\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{1}{r\,\delta}\right)\mathrm{e}^{-r/\delta} + B\left(\dfrac{1}{r^2} - \dfrac{1}{r\,\delta}\right)\mathrm{e}^{r/\delta}\right]\vec{e}_r$.
Comme le champ électrostatique doit s'annuler à grande distance, on en déduit que : $B = 0$.
Pour déterminer le champ électrostatique à la surface de la particule, on applique le théorème de Gauss avec une sphère de centre O et de rayon R comme surface de Gauss, qui contient donc la charge Q, d'où : $\oiint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$, avec $\oiint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \oiint_S E(R)\,\mathrm{d}S = E(R)\,4\,\pi\,R^2$, et on en déduit que : $E(R) = \dfrac{Q}{4\,\pi\,R^2\,\varepsilon_0}$.
La continuité du champ à la surface de la particule impose : $E(R) = A\left(\dfrac{1}{R^2} + \dfrac{1}{R\,\delta}\right)\mathrm{e}^{-R/\delta} = \dfrac{Q}{4\,\pi\,R^2\,\varepsilon_0}$, d'où : $A = \dfrac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\left(1 + \frac{R}{\delta}\right)\mathrm{e}^{-R/\delta}}$.
On obtient finalement : $\vec{E}(r) = \dfrac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\left(1 + \frac{R}{\delta}\right)\mathrm{e}^{-R/\delta}}\left(\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{1}{r\,\delta}\right)\mathrm{e}^{-r/\delta}\,\vec{e}_r$.

5. En l'absence d'ion, le champ électrostatique créé par la particule décroit comme $\dfrac{1}{r^2}$. L'ajout d'ions renforce la décroissance du champ, puisque celui-ci n'est plus perceptible à une distance $r \gg \delta$.
Comme le champ créé par les particules colloïdales est écranté par les ions, la répulsion entre les particules en suspension est diminuée, ce qui permet la floculation.

Exercice 5 : Charges à la surface d'une membrane cellulaire

On considère une membrane cellulaire qui sépare l'intérieur d'une cellule (occupant le demi-espace $z < 0$) d'une solution électrolytique (occupant le demi-espace $z > 0$).



Des mesures réalisées à l'aide d'une électrode montrent que le potentiel électrostatique peut s'exprimer de la forme :

$$V(z) = \begin{cases} -V_0 & \text{pour } z \leqslant 0 \\ -V_0\,\mathrm{e}^{-z/a} & \text{pour } z > 0 \end{cases}$$

avec V_0 et a des constantes positives.

1. Exprimer le champ électrostatique $\overrightarrow{E}(z)$ en tout point de l'espace.

2. En déduire la densité volumique de charge $\rho(z)$.

3. D'où provient cette distribution volumique de charge dans la solution électrolytique ?

4. À l'aide du théorème de Gauss, déterminer la densité surfacique de charge σ présente sur la surface de la membrane.

Correction :

1. Le champ électrostatique s'exprime : $\overrightarrow{E}(z) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V(z) = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\,\vec{e}_z = \begin{cases} \vec{0} & \text{pour } z \leqslant 0 \\ -\dfrac{V_0}{a}\,\mathrm{e}^{-z/a}\,\vec{e}_z & \text{pour } z > 0 \end{cases}$.

2. L'équation de Maxwell-Gauss donne : $\mathrm{div}\,\overrightarrow{E} = \dfrac{\rho(z)}{\varepsilon_0}$, d'où : $\rho(z) = \varepsilon_0\,\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}z} = \begin{cases} 0 & \text{pour } z \leqslant 0 \\ \dfrac{\varepsilon_0\,V_0}{a^2}\,\mathrm{e}^{-z/a} & \text{pour } z > 0 \end{cases}$.

3. La distribution volumique de charge dans la solution électrolytique provient d'une accumulation de cations ou d'anions dans une zone spécifique. On observe ici une accumulation de cations à proximité de la membrane.

4. On choisit pour surface de Gauss un cylindre d'axe (Oz) de surface S et compris entre les cotes $z = -L$ et $z = L$ afin de contenir la membrane, d'où :

- pour les surfaces latérales : $\displaystyle\iint_{S_{\text{lat}}} \overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = 0$ car $\overrightarrow{E} \perp \mathrm{d}\overrightarrow{S}$;
- pour les surfaces en $z = -L$: $\displaystyle\iint_{S_{-L}} \overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = 0$ car $\overrightarrow{E}(-L) = \vec{0}$;
- pour les surfaces en $z = L$: $\displaystyle\iint_{S_L} \overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \iint_{S_L} E(L)\,\mathrm{d}S = E(L)\iint_{S_L}\mathrm{d}S = -\frac{V_0}{a}\,\mathrm{e}^{-L/a}\,S$;

et on obtient finalement : $\displaystyle\oiint_{S_{\text{G}}} \overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \iint_{S_{\text{lat}}} \overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} + \iint_{S_{-L}} \overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} + \iint_{S_L} \overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = -\frac{V_0}{a}\,\mathrm{e}^{-L/a}\,S.$

La charge contenue à l'intérieur de la surface de Gauss est composée des charges surfaciques sur la membrane et des charges volumiques compris entre $z = 0$ et $z = L$, soit : $Q_{\text{int}} = \displaystyle\iint_S \sigma\,\mathrm{d}S + \iiint_{V_{\text{G}}} \rho(z)\,\mathrm{d}\tau = \sigma\,S + \int_{z=0}^{L} \frac{\varepsilon_0\,V_0}{a^2}\,\mathrm{e}^{-z/a}\,S\,\mathrm{d}z = \sigma\,S - \frac{\varepsilon_0\,V_0}{a}\left(\mathrm{e}^{-L/a} - 1\right)S.$

L'application du théorème de Gauss donne : $\displaystyle\oiint_S \overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$, soit : $-\dfrac{V_0}{a}\,\mathrm{e}^{-L/a}\,S = \dfrac{\sigma\,S}{\varepsilon_0} - \dfrac{V_0}{a}\left(\mathrm{e}^{-L/a} - 1\right)S$, d'où : $\sigma = -\dfrac{\varepsilon_0\,V_0}{a}$.